

# Mathematical Statistics

## Estimation

### 1. 參數估計

- Method of moment 的建構方法, 優點, 缺點
- MLE 的建構方法, 優點, 缺點
- Least squares 的建構原則
- Method of moment, MLE, least squares 會相同嗎? 請舉例

### 2. 評估參數估計量的原則與哪些是估計量的好性質 (1)

- Mean squared error (MSE)
- Bias
- variance: 檢驗 efficiency 的方法 (CR lower bound), 解釋 information number, 解釋 relative efficiency
- MSE, bias, variance 的關係

### 3. 評估參數估計量的原則與哪些是估計量的好性質 (2)

- 解釋 UMVUE (variance 一定會達到 CR lower bound?)
- 解釋統計量的充份性, 檢驗方法 (exponential family 定義, 針對 exponential family 找充份統計量)
- 充份統計量與 UMVUE 的關係, Rao-Blackwell theorem

### 4. 估計量所牽涉到的假設與性質

- random sample 的意義
- 如何檢驗 data 是否服從哪個分佈
- 當 data 出自常態分佈, sample mean 與 sample variance 的分佈為何?
- 當 data 非出自常態分佈, 如何得知 sample mean 與 sample variance 的分佈?
- t, 卡方, F 分佈如何推導?

## Hypothesis testing

### 5. Hypothesis testing 基本定義性質

- Null hypothesis, alternative hypothesis, randomized test, type I error, type II error
- 什麼是 MP test (alpha, power 的意義)
- 解釋 Neyman-Pearson paradigm

## 6. 有了假說後, 如何建構檢定統計量

- 解釋 likelihood ratio (LR) test (以參數估計量為基礎)
- Asymptotic distribution of LR
- 以檢定常態分佈的 mean 為例, 說明如何建構 LR test

## 7. Confidence interval

- Confidence interval 的定義
- 如何從點估計量建立 confidence interval? 請舉例
- Confidence level 的意義
- 如何比較兩個 confidence intervals 的公式 (長度小的比較好, given the same confidence level)
- 如何利用 confidence interval 建構假設檢定?

## 8. Two-sample comparison

- 如何用圖形比較兩個樣本 (stem-leaf plots, boxplots ...)
- Two-sample t test
- 當雙樣本分別來自獨立的 normal populations 但 variances 均未知時, 說明如何使用 two-sample t test.
- 比較 paired sample design 與 two-sample designs

## Probability

### 9. Probabilistic concepts

- 樣本空間、事件、axioms of probability、隨機變數 (以簡單例子說明)
- Distribution function, density function and their relationship (對連續型與離散型隨機變數)
- Quantiles of a distribution

## 10. 連續型與離散型隨機變數

- Poisson random variable 的適用情形
- Binominal random variable 的適用情形, 何時可用 Poisson approximation, Normal approximation?
- Sample mean, sample variance 與 Normal, Chi-square 分佈的關係
- Let  $X$  be a random variable with distribution function  $F(x)$ , if  $U$  is uniform on  $[0, 1]$ , then  $F^{-1}(U)$  has distribution function  $F(x)$ .

## 11. Multiple random variables $X_1, X_2, \dots, X_n$

- What are the joint and marginal distributions? 兩者的關連性?
- For two random variables  $X=0,1$  and  $Y=0,1$ ,  $f(0,0)=f(0,1)=1/6$ ,  $f(1,0)=f(1,1)=1/3$ . What are the density functions for  $X$  and  $Y$ , respectively?
- 條件機率與獨立
- Covariance and correlation
- Covariance=0 與 independence 誰 imply 誰?

## 12. Moments of random variables

- $n$ th moment of a random variable, expectation, variance 定義
- 試導出 Normal distribution 的 expectation, variance
- 條件分佈  $p(X|Y)$  與值條件期望值  $E(X|Y)$ :
  - A random variable of what?
  - $E(E(X|Y))$ : 等於什麼? 第一個  $E$  是針對  $X$  or  $Y$ ? 第二個  $E$  是針對  $X$  or  $Y$ ?
  - 若  $p(X=1|Y=0)=p(X=2|Y=0)=0.5$ ,  $p(X=1|Y=1)=p(X=2|Y=1)=0.5$  and  $p(Y=0)=0.2$ ,  $p(Y=1)=0.8$ , 計算  $E(E(X|Y))$

## 13. 收斂

- Converge almost surely
- Converge in probability
- 大數法則
- Converge in distribution
- 中央極限定理
- 這些收斂間彼此的關係

#### 14. 不等式

- 用 Cauchy-Schwarz inequality 去證  $(\text{Cov}(X,Y))^2 \leq \text{Var}(X)\text{Var}(Y)$
- 用 Jensen's inequality 去證幾何平均數小於算術平均數
- 用 Chebychev's inequality 去證弱大數法則當假設  $\text{variance} < \infty$